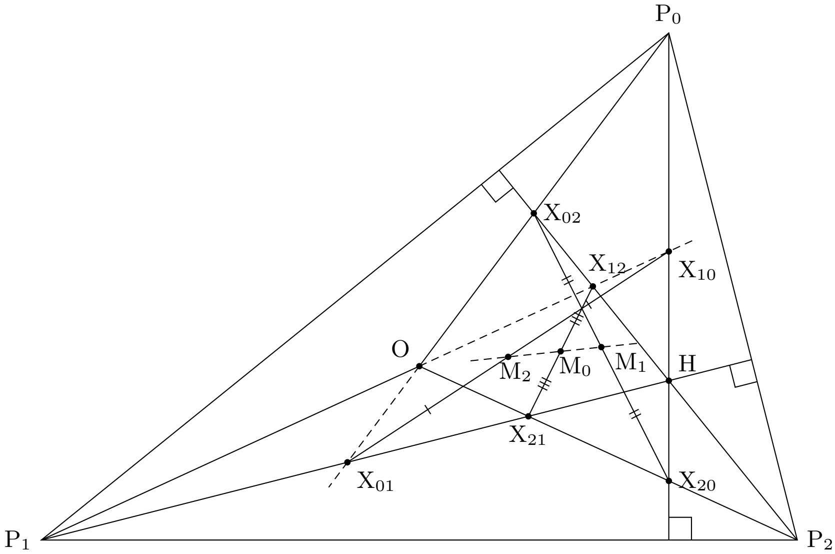
数学の決闘2018 決勝解答（一部）

問題 2. $\triangle \mathrm{P_0P_1P_2}$ の外心を O、垂心を H とする。OP_i と HP_j の交点を X_{ij} $\quad (i=0,\cdots,2, j=0,\cdots,2, i \neq j)$ とし、X_{ij} と X_{ji} の中点を $\mathrm{M}_{3-(i+j)}$ とする。このとき、M_i $(i=0,\cdots,2)$ が共線であることを示せ。（簡単のため、$\triangle \mathrm{P_0P_1P_2}$ は鋭角不等辺三角形を仮定してよい）



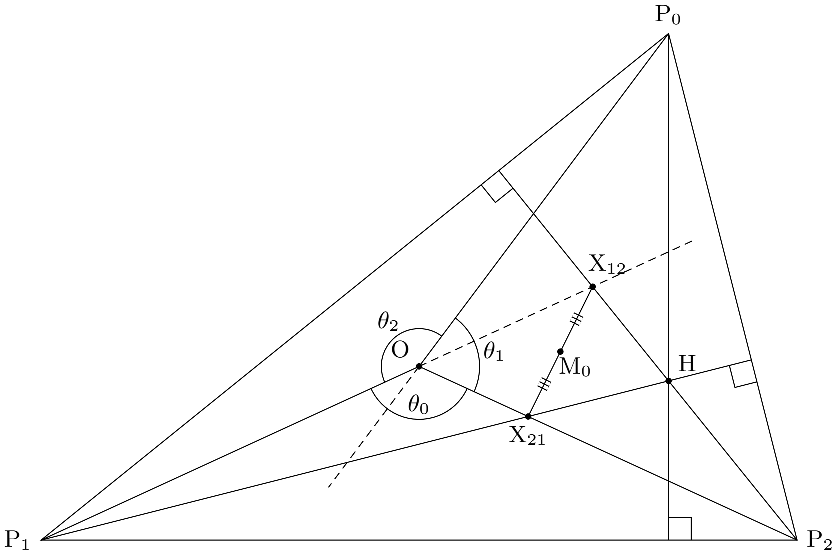
【解答】

必要なら全体を拡大・縮小することにより、外接円の半径を 1 としてよい。そこで

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\right| = 1$$

とする。

また、$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}, \overrightarrow{\mathrm{OP_1}}, \overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ のなす角を図のように $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ とおく。



鋭角三角形であることから、$0 < \theta_i < \pi \quad (i=0,\cdots,2)$ である。また、円周角の定理より

$$\theta_i = 2\mathrm{P}_i \quad (i=0,\cdots,2)$$

である。

$\overrightarrow{\mathrm{OX}_{12}} = t\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ とおく。$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{X}_{12}} = t\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} \perp \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ より

$$
\begin{aligned}
(t\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_2})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}) &= 0 \\
\therefore t(\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}) - (\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}) &= 0 \\
\therefore t(1-\cos\theta_2) &= \cos\theta_0 - \cos\theta_1
\end{aligned}
$$

$\cos\theta_2 \neq 1$ より

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta_1}{1-\cos\theta_2} = \frac{\cos 2\mathrm{P}_0 - \cos 2\mathrm{P}_1}{1-\cos 2\mathrm{P}_2} \\
&= \frac{-2\sin(\mathrm{P}_0+\mathrm{P}_1)\sin(\mathrm{P}_0-\mathrm{P}_1)}{2\sin^2\mathrm{P}_2} \\
&= \frac{-\sin\mathrm{P}_2\sin(\mathrm{P}_0-\mathrm{P}_1)}{\sin^2\mathrm{P}_2} \quad (\because \mathrm{P}_0+\mathrm{P}_1 = \pi - \mathrm{P}_2) \\
&= -\frac{\sin(\mathrm{P}_0-\mathrm{P}_1)}{\sin\mathrm{P}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \overrightarrow{\mathrm{OX}_{12}} &= -\frac{\sin(\mathrm{P}_0-\mathrm{P}_1)}{\sin\mathrm{P}_2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OX}_{21}} = -\frac{\sin(\mathrm{P}_0-\mathrm{P}_2)}{\sin\mathrm{P}_1}\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} \\
\therefore 2\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} &= -\frac{\sin(\mathrm{P}_0-\mathrm{P}_1)}{\sin\mathrm{P}_2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \frac{\sin(\mathrm{P}_0-\mathrm{P}_2)}{\sin\mathrm{P}_1}\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} \\
2\overrightarrow{\mathrm{OM}_1} &= -\frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_0)}{\sin\mathrm{P}_2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} - \frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_2)}{\sin\mathrm{P}_0}\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}
\end{aligned}
$$

与えられた図から、題意の共線は O を通ると予想される。これを示すには、対称性から、$\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{OM}_1}$ であること、及びそれらの比例係数が 0 でないことを確かめればよい。
$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}, \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ の 1 次結合で表す（$0 < \theta_0 < \pi$ なのでそれは可能)。

$$
\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = p\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + q\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}
$$

とおき、両辺と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}, \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ の内積をとると

$$
\begin{aligned}
\cos\theta_2 &= p + q\cos\theta_0 \\
\cos\theta_1 &= p\cos\theta_0 + q \\
\therefore p(1-\cos^2\theta_0) &= \cos\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_0 \\
\therefore p\sin^2\theta_0 &= \cos(\theta_0+\theta_1) - \cos\theta_1\cos\theta_0 \quad (\because \theta_2 = 2\pi - (\theta_0+\theta_1)) \\
&= -\sin\theta_0\sin\theta_1
\end{aligned}
$$

$\sin\theta_0 \neq 0$ より

$$
\begin{aligned}
p &= -\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_0}, \quad q = -\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0} \\
\therefore \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} &= -\frac{(\sin\theta_1)\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + (\sin\theta_2)\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}}{\sin\theta_0}
\end{aligned}
$$

これより

$$
2\overrightarrow{\mathrm{OM}_1} = +\frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_0)}{\sin\mathrm{P}_2}\frac{(\sin\theta_1)\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + (\sin\theta_2)\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}}{\sin\theta_0} - \frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_2)}{\sin\mathrm{P}_0}\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}
$$

右辺の、$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ の係数は

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_0)}{\sin\mathrm{P}_2} \times \frac{\sin 2\mathrm{P}_1}{\sin 2\mathrm{P}_0} &= \frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_0)}{\sin\mathrm{P}_2} \times \frac{2\sin\mathrm{P}_1\cos\mathrm{P}_1}{2\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_0} \\
&= \frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_0)\sin\mathrm{P}_1\cos\mathrm{P}_1}{\sin\mathrm{P}_2\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_0}
\end{aligned}
$$

一方、$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ の係数は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_0)}{\sin\mathrm{P}_2}\times\frac{\sin 2\mathrm{P}_2}{\sin 2\mathrm{P}_0}-\frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_2)}{\sin\mathrm{P}_0}\\
&=\frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_0)}{\sin\mathrm{P}_2}\times\frac{2\sin\mathrm{P}_2\cos\mathrm{P}_2}{2\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_0}-\frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_2)}{\sin\mathrm{P}_0}\\
&=\frac{\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_0)\cos\mathrm{P}_2-\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_2)\cos\mathrm{P}_0}{\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_0}\\
&=\frac{(\sin\mathrm{P}_1\cos\mathrm{P}_0-\cos\mathrm{P}_1\sin\mathrm{P}_0)\cos\mathrm{P}_2-(\sin\mathrm{P}_1\cos\mathrm{P}_2-\cos\mathrm{P}_1\sin\mathrm{P}_2)\cos\mathrm{P}_0}{\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_0}\\
&=\frac{\cos\mathrm{P}_1(-\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_2+\sin\mathrm{P}_2\cos\mathrm{P}_0)}{\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_0}\\
&=\frac{\cos\mathrm{P}_1\sin(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_0)}{\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_0}
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
2\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}&=\frac{\cos\mathrm{P}_1}{\sin\mathrm{P}_2\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_0}\left((\sin\mathrm{P}_1\sin(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_0))\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+(\sin\mathrm{P}_2\sin(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_0))\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\right)\\
&=\frac{\cos\mathrm{P}_1}{\sin\mathrm{P}_2\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_0}(\sin\mathrm{P}_1\sin\mathrm{P}_2)\times 2\overrightarrow{\mathrm{OM_0}}\\
&=\frac{2\cos\mathrm{P}_1\sin\mathrm{P}_1}{\sin\mathrm{P}_0\cos\mathrm{P}_0}\overrightarrow{\mathrm{OM_0}} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

だから、$\overrightarrow{\mathrm{OM_1}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OM_0}}$ が示された。また、①の $\overrightarrow{\mathrm{OM_0}}$ の係数も、P_1 が鋭角であることから非 0 である。 ■