数学の決闘2018 没問題 解答（一部）

問題 1. (tb_lb さん) 次の式を計算して、既約分数で表してください。

$$\frac{1}{2016^2}+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2016^2\times 2017^2\times 2018^2}$$
$$-\frac{1}{2016^2\times 2017^2}-\frac{1}{2017^2\times 2018^2}-\frac{1}{2018^2\times 2016^2}$$

なお、必要ならば $2016^2=4064256$, $2017^2=4068289$, $2018^2=4072324$ を利用してください。

【解答】 恒等式

$$(A-1)(B-1)(C-1)=ABC-(AB+BC+CA)+A+B+C-1$$

に着目すると、与式は $A=\dfrac{1}{2016^2}$, $B=\dfrac{1}{2017^2}$, $C=\dfrac{1}{2018^2}$ のときの右辺とほぼ同じで、1 のずれを補正するとこうなる。

$$\begin{aligned}
\text{（与式）} &= \left(\frac{1}{2016^2}-1\right)\left(\frac{1}{2017^2}-1\right)\left(\frac{1}{2018^2}-1\right)+1\\
&= \left(\frac{1}{2016}-1\right)\left(\frac{1}{2016}+1\right)\left(\frac{1}{2017}-1\right)\left(\frac{1}{2017}+1\right)\left(\frac{1}{2018}-1\right)\left(\frac{1}{2018}+1\right)+1\\
&= \frac{-2015}{2016}\cdot\frac{\cancel{2017}}{\cancel{2016}}\cdot\frac{\cancel{-2016}}{\cancel{2017}}\cdot\frac{\cancel{2018}}{\cancel{2017}}\cdot\frac{\cancel{-2017}}{\cancel{2018}}\cdot\frac{2019}{2018}+1\\
&= \frac{-2015\cdot 2019}{2016\cdot 2018}+1\\
&= \frac{(2017-1)(2017+1)-(2017-2)(2017+2)}{(2017-1)(2017+1)}\\
&= \frac{2017^2-1-(2017^2-4)}{2017^2-1}\\
&= \frac{3}{4068288}=\boxed{\frac{1}{1356096}}
\end{aligned}$$

問題 4. (K さん) 以下において、$\mathbb{R}^3$ は空間ベクトル全体で、ベクトル同士の和や実数倍（スカラー倍）が自然に定まっているものとする。今、$(-.-)\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ は次を満たす。（すなわち、対称な双線形写像である。）

(i) $(av.w)=a(v.w)$

(ii) $(v+v'.w)=(v.w)+(v'.w)$

(iii) $(v.w) = (w.v)$

ここで、$v, v', w \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ である。

この写像について、次の条件を満たすような部分集合 $S \subset \mathbb{R}^3$ が存在するとする。

$$\forall w \in S, (v.w) > 0 \implies v \in S$$

また、ある $h \in \mathbb{R}^3$ が存在して、$\forall w \in S, (h.w) > 0$ をみたす。

このとき、$v \in \mathbb{R}^3$ について、$\forall w \in S, (v.w) \geqq 0$ ならば $(v.v) \geqq 0$ となることを示せ。

【解答】 v が $\forall w \in S, (v.w) \geqq 0$ をみたすとする。このとき、$t > 0$ に対して $\tilde{v} = v + th$ とおくと

$$\forall w \in S, (\tilde{v}.w) = (v + th.w) = \underbrace{(v.w)}_{\geqq 0} + t\underbrace{(h.w)}_{>0} > 0$$

なので S についての仮定より $\tilde{v} \in S$ である。すると v の仮定より $(v.\tilde{v}) \geqq 0$ であるが、一方

$$(v.\tilde{v}) = (v.v + th) = (v.v) + t(v.h)$$

である。この t の 1 次関数が、$\forall t > 0$ に対し 0 以上になるので、定数項 $(v.v) \geqq 0$ でなければならない。 ■

問題 5. (よったんさん) n 次の単位行列を I_n とする。ブロック行列 A_i と行列 H_i を以下のように定義するとき、すべての正整数 i で $A_i^i = H_i$ となることを示せ。

$$A_i = \begin{pmatrix} I_{2^{i-1}} \otimes (1 \quad 1) \\ I_{2^{i-1}} \otimes (1 \ -1) \end{pmatrix} \quad (1 \leqq i)$$
$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$H_i = H_1 \otimes H_{i-1} \quad (2 \leqq i)$$

ここで $\otimes$ はクロネッカー積を表し、$X = (x_{ij})$ を $n \times m$ 行列、Y を $p \times q$ 行列とすると、$X \otimes Y$ は $np \times mq$ ブロック行列 $\begin{pmatrix} x_{11}Y & \dots & x_{1m}Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}Y & \dots & x_{nm}Y \end{pmatrix}$ である。必要であればクロネッカー積に関する以下の事実を利用してよい。(注：交換則は成り立たない)

- $X \otimes (Y + Z) = X \otimes Y + X \otimes Z$ （左分配則）
- $(X + Y) \otimes Z = X \otimes Z + Y \otimes Z$ （右分配則）
- $(kX) \otimes Y = X \otimes (kY) = k(X \otimes Y)$ （スカラー倍）
- $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$ （結合則）
- $(V \otimes W)(X \otimes Y) = (VX) \otimes (WY)$ （混合積性質）
- $(X \otimes Y)^T = X^T \otimes Y^T$ （転置）
- X, Y が正則なら $(X \otimes Y)^{-1} = X^{-1} \otimes Y^{-1}$ （逆元）

- X, Y が正方行列なら $(X \otimes Y) = P(Y \otimes X)P^T$ となる置換行列 P が存在する。（置換相似）

【解答】

まず、$1 \leqq m \leqq i$ に対して

$$A_i^m = \begin{pmatrix} \boxed{H_m \text{ の } 1 \text{ 行目}} & & & O \\ & \boxed{H_m \text{ の } 1 \text{ 行目}} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{H_m \text{ の } 1 \text{ 行目}} \\ \boxed{H_m \text{ の } 2 \text{ 行目}} & & & O \\ & \boxed{H_m \text{ の } 2 \text{ 行目}} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{H_m \text{ の } 2 \text{ 行目}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{H_m \text{ の } 2^m \text{ 行目}} & & & O \\ & \boxed{H_m \text{ の } 2^m \text{ 行目}} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{H_m \text{ の } 2^m \text{ 行目}} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であることを示す。m に関する数学的帰納法を用いる。

(i) $m = 1$ のとき

$$A_i = \begin{pmatrix} I_{2^{i-1}} \otimes (1 \quad 1) \\ I_{2^{i-1}} \otimes (1 \quad -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & O \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ O & & & & & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & & & & O \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ O & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

なので、①は $m = 1$ のときは正しい。

(ii) $m = k (< i)$ までは①が正しかったとする。このとき

$$A_i^{k+1} = A_i A_i^k$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 1 & & & & & O \\
& & 1 & 1 & & & \\
& & & & \ddots & & \\
O & & & & & 1 & 1 \\
1 & -1 & & & & & O \\
& & 1 & -1 & & & \\
& & & & \ddots & & \\
O & & & & & 1 & -1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & & & O \\
& \boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} \\
\boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & & & O \\
& \boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & & & O \\
& \boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & \boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & & & & & O \\
& & \boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & \boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & & & \\
& & & & \ddots & & \\
O & & & & & \boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & \boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} \\
\boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & \boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & & & & & O \\
& & \boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & \boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & & & \\
& & & & \ddots & & \\
O & & & & & \boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & \boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} \\
& & & \vdots & & & \\
\boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & \boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & & & & & O \\
& & \boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & \boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & & & \\
& & & & \ddots & & \\
O & & & & & \boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & \boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} \\
\boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & -\boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & & & & & O \\
& & \boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & -\boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & & & \\
& & & & \ddots & & \\
O & & & & & \boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} & -\boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} \\
\boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & -\boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & & & & & O \\
& & \boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & -\boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & & & \\
& & & & \ddots & & \\
O & & & & & \boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} & -\boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} \\
& & & \vdots & & & \\
\boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & -\boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & & & & & O \\
& & \boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & -\boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & & & \\
& & & & \ddots & & \\
O & & & & & \boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} & -\boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}}
\end{pmatrix}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
H_{k+1} &= H_1 \otimes H_k \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes H_k
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

により

$$\begin{aligned}
H_{k+1} \text{ の } 1 \text{ 行目} &= \left(\boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} \quad \boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}}\right) \\
H_{k+1} \text{ の } 2 \text{ 行目} &= \left(\boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} \quad \boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}}\right) \\
&\vdots \\
H_{k+1} \text{ の } 2^k \text{ 行目} &= \left(\boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} \quad \boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}}\right) \\
H_{k+1} \text{ の } 2^k + 1 \text{ 行目} &= \left(\boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}} \quad -\boxed{H_k \text{ の } 1 \text{ 行目}}\right) \\
H_{k+1} \text{ の } 2^k + 2 \text{ 行目} &= \left(\boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}} \quad -\boxed{H_k \text{ の } 2 \text{ 行目}}\right) \\
&\vdots \\
H_{k+1} \text{ の } 2^{k+1} \text{ 行目} &= \left(\boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}} \quad -\boxed{H_k \text{ の } 2^k \text{ 行目}}\right)
\end{aligned}$$

となっているので、

$$A_i^{k+1} = \begin{pmatrix}
\boxed{H_{k+1} \text{ の } 1 \text{ 行目}} & & & O \\
& \boxed{H_{k+1} \text{ の } 1 \text{ 行目}} & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \boxed{H_{k+1} \text{ の } 1 \text{ 行目}} \\
\boxed{H_{k+1} \text{ の } 2 \text{ 行目}} & & & O \\
& \boxed{H_{k+1} \text{ の } 2 \text{ 行目}} & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \boxed{H_{k+1} \text{ の } 2 \text{ 行目}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boxed{H_{k+1} \text{ の } 2^{k+1} \text{ 行目}} & & & O \\
& \boxed{H_{k+1} \text{ の } 2^{k+1} \text{ 行目}} & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \boxed{H_{k+1} \text{ の } 2^{k+1} \text{ 行目}}
\end{pmatrix}$$

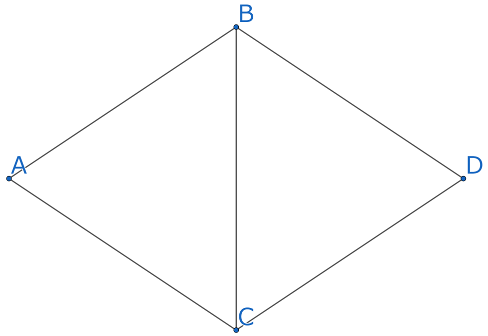
となる。したがって、①は $m = k + 1$ に対しても正しい。

以上 (i)(ii) より、①は $1 \leqq m \leqq i$ の範囲のすべての m に対し正しい。

①の $m=i$ のときの結果より

$$A_i^i = \begin{pmatrix} \boxed{H_i \text{ の 1 行目}} \\ \boxed{H_i \text{ の 2 行目}} \\ \vdots \\ \boxed{H_i \text{ の } 2^i \text{ 行目}} \end{pmatrix} = H_i \quad \blacksquare$$

問題 7. (岸本祥吾さん) 図のような状況を考え、各線分はそれぞれ確率 $p(0 \leqq p \leqq 1)$ で線分として残り、確率 $1-p$ で消滅するとする。つまり、4 つの点 A,B,C,D があり、線分 AB, AC, BC, BD, CD はそれぞれ確率 p で存在し、確率 $1-p$ で消滅する。



この設定のもと、実数 $p(0 \leqq p \leqq 1)$ が与えられたもとで頂点 A から頂点 D へ線分をたどって到達可能である確率を $f(p)$ で表すとする。このとき、$f(p)+f(1-p)=1$ を示せ。

【解答】 各線分を「不良品の導線」と見なし、外見ではわからないが各々独立に確率 p で通電し、確率 $1-p$ で断線しているものと考える。すると $f(p)$ は A–D 間が通電する確率である。$q=1-p$ とおく。

(i) BC が通電する場合

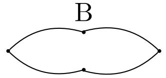
次の回路図と同じ。各曲線が各々確率 $p,\ 1-p$ で独立に通電・断線する。

よって、A から D まで通電する確率は

( が通電する確率 $)^2 = (1-q^2)^2$

(ii) BC が断線する場合

次の回路図と同じ。



よって、A から D まで通電する確率は、余事象を考え

$1-\Big($ が通電しない確率 $\Big)^2 = 1-(1-p^2)^2$

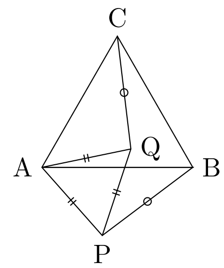
以上から

$$f(p) = p(1-q^2)^2 + q\big(1-(1-p^2)^2\big) = \underbrace{p(1-q^2)^2 - q(1-p^2)^2}_{p,q\text{ について反対称}} + q$$

$$\therefore f(1-p) = q(1-p^2)^2 - p(1-q^2)^2 + p$$

$$\therefore f(p) + f(1-p) = q + p = 1 \quad \blacksquare$$

問題 8. ($N.K.$ さん) 正三角形 ABC に対して、AP + BP = CP をみたす点 P の軌跡を求めよ。



【解答】 図のように、A, B, C を反時計回りの順に並べたとする。A を中心に P を $+60^\circ$ 回転した点を Q とする。△ABP を A を中心に $+60^\circ$ 回転すると △ACQ に重なるので △ABP ≡ △ACQ　　∴ BP = CQ （これは、A, B, P が一直線上にあって △ABP がつぶれてしまう場合も含めてなりたつ）

$$\therefore \mathrm{AP} + \mathrm{BP} = \mathrm{PQ} + \mathrm{QC} \geqq \mathrm{CP} \quad (\because \text{三角不等式})$$

等号成立条件は、Q が線分 CP 上（両端含む）にあること。

よって、等号が成立するとき、

(i) P ≠ Q なら $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $+60^\circ$ 回転すると $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と同じ向きのベクトルになり、

(ii) P = Q なら A = P = Q

であるから、どちらにしても P は △ABC の外接円 O の優弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 上（端点含む）。

A と B の対称性によって、P は O の優弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 上にもなければいけないので、結局 P は O の劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上（両端含む）。

逆にそのとき、Q は線分 PC 上にあるので、等号が成立する。よって答は O の劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$。 ■