数学の決闘2018 予選第3セット解答（一部）

問題 2. 1 以上 2018 以下の自然数 n に対して 2018 を n で割ったときの商と余りの合計を返す関数を $S(n)$ とする。

例えば 2018 を 64 で割ると 31 余り 34 なので $S(64)=31+34=65$ となる。

このように $S(n)=n+1$ となる n は何個存在するだろうか？

【解答】 2018 を n で割った商と余りをそれぞれ $q,\, r$ とする。

$$2018 = qn + r \qquad (0 \leqq r < n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$S(n)=n+1$ となる条件は

$$q + r = n + 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である。

②より

$$q = n + 1 - r \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

で、これと①から q を消去すると

$$\begin{aligned} & 2018 = (n+1-r)n + r \\ \iff\ & (n-1)r = (n+1)n - 2018 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④} \end{aligned}$$

となる。

$n=1$ のとき④は成立しないので $n>1$ である。よって $0 \leqq r < n$ の各辺に $n-1$ をかけても不等号は変化しないので、④より次の式が得られる。

$$\begin{aligned} 0 \leqq (n+1)n - 2018 < n(n-1) &\iff (n+1)n \geqq 2018 \text{ かつ } \underbrace{(n+1)n - n(n-1)}_{2n} < 2018 \\ &\iff n \geqq 45 \text{ かつ } n < 1009 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤} \end{aligned}$$

⑤のとき $n>1$ はみたされる。

さらに、④のとき $(n+1)n-2018$ は $n-1$ の倍数なので

$$\begin{aligned} (n+1)n - 2018 \equiv 0 \pmod{n-1} &\iff (1+1)1 - 2018 \equiv 0 \quad (\because n \equiv 1) \pmod{n-1} \\ &\iff 2016 \equiv 0 \pmod{n-1} \\ &\iff n-1 \text{ は } 2016 \text{ の約数} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥} \end{aligned}$$

である。

以上で、$S(n)=n+1$ のとき、⑤かつ⑥であることがわかった。

逆に、⑤かつ⑥のとき、

- ⑥より $(n+1)n-2018$ は $n-1$ の倍数だから、④をみたす整数 r が存在し、
- ⑤および $n>1$ よりその r は $0 \leqq r < n$ をみたし、
- その r を使って③で q を定めると q は整数で、
- そうやって決めた $q,\, r$ は①をみたすから 2018 を n で割った商と余りになっており、
- ②によって $S(n)=n+1$ をみたす。

よって $S(n)=n+1 \iff$ ⑤かつ⑥ だから、n に対する条件は

　$n-1$ が、2016 の約数のうち 44 以上 1008 未満のものになること

である。そのような $n-1$ の個数を求めればよい。

$2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ の正の約数は $6\cdot 3\cdot 2=36$ 個あり、このうち $n-1$ として不適なものは次の通り。

- 44 未満のもの
$$1,2,3,4,6,7,8,9,12,14,16,18,21,24,28,32,36,42$$
の 18 個。
- 1008 以上のもの
$$1008,2016$$
の 2 個。

以上から答は $36-(18+2)=\boxed{16\text{ 個}}$

問題 3. 十進法表記で、1, 2, 3 の 3 種類の数字を用いてつくる 100 桁の自然数のうち、7 の倍数の個数 N を求めよ。

【解答】

1, 2, 3 を並べてつくられる 100 桁の自然数から $\underbrace{111\ldots1}_{100\text{ 桁}}$（$A$ とする）を引くと、0, 1, 2 を並べてつくられる 100 桁以下の非負整数になる。この対応は 1 対 1 である。

さらに $10\equiv 3\pmod 7$ より
$$\sum_{n=0}^{99}\begin{Bmatrix}0\\1\\2\end{Bmatrix}\times 10^n\equiv\sum_{n=0}^{99}\begin{Bmatrix}0\\1\\2\end{Bmatrix}\times 3^n\pmod 7$$
であるから、A を引いた後の数は「3 進法で 100 桁以下の非負整数全体」と mod 7 で一致。

そして $10^3\equiv 3^3\equiv -1\pmod 7$ より $A=11\ldots1$ は mod 7 では左の桁から 6 桁ずつが打ち消し合って消えていき、
$$A\equiv 1111\equiv -1+111=110\equiv -2\pmod 7$$
となる。

以上から、N は

3^{100} 未満の非負整数のうち、7 で割った余りが 2 であるものの個数

と同じ。$3^{100}\equiv(3^3)^{33}\cdot 3\equiv(-1)^{33}\cdot 3=-3\pmod 7$ より、3^{100} 未満の非負整数で 7 の倍数であるものは 0 も含めて $\dfrac{3^{100}+3}{7}$ 個。3^{100} を 7 で割った余り 4 が 2 よりも大きいから、N も $\boxed{\dfrac{3^{100}+3}{7}}$ に等しい。