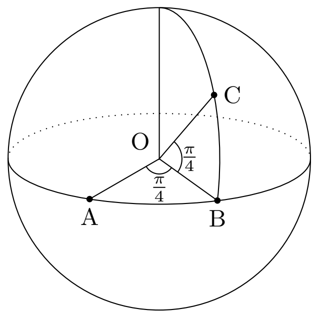
数学の決闘2018 予選第2セット解答（一部）

問題 2. 地球の表面に沿って地点 A からまっすぐ 5000km 進むと地点 B に着く。そこから $90°$ 進路を曲げてまっすぐ 5000km 進むと地点 C に着く。地点 A から地点 C へ直接行く場合、何 km 進めばよいか。四捨五入して整数で答えなさい。なお、地球は一周 40000km の完全な球であり、移動中は地球内部を通らないものとする。

【解答】



地球の中心 O を原点とする xyz 座標系を取る。$\angle\mathrm{AOB}$, $\angle\mathrm{BOC}$ はいずれも

$$2\pi \times \frac{5000}{40000} = \frac{\pi}{4}$$

であるから、座標軸は次のように取れる。

- A は x 軸の正の部分にある。
- B は xy 平面の第 1 象限にある。
- C は $z > 0$ の部分にある。

すると、地球の半径を R とすると

$$\mathrm{A}(R, 0, 0), \quad \mathrm{C}\left(R\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}, R\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}, R\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

である。

$\theta = \angle\mathrm{AOC}$ とおいて内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を 2 通りに計算すれば

$$R^2\cos\theta = R^2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = R^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

よって、求める長さは

$$\overset{\frown}{\mathrm{AC}} = 40000 \times \frac{\pi/3}{2\pi} = \frac{20000}{3} \approx \boxed{6667\mathrm{km}}$$

問題 3. a は 4 で割って 1 余る正の整数とします。このとき、正の整数 n と m が存在して、$n^2 + m$ と $(n+1)^2 + m$ の最大公約数が a となることを示しなさい。

【解答】 まず、$a = 1$ のときは $n = 1, m = 1$ が適する。以下、$a > 1$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}\gcd(n^2+m, (n+1)^2+m) &= \gcd(n^2+m, (n+1)^2+m-(n^2+m)) \\ &= \gcd(n^2+m, 2n+1)\end{aligned}$$

である。これが a に等しくなってほしいわけだが、ここでさらに「$2n+1$ がちょうどこの最大公約数になっている」ような都合のいい場合がないかどうか調べてみる。

そうなっているとすると $a = 2n+1$ だが、a は 4 で割ったら 1 余るので、n は偶数となる。そこでさらに試しに $n = 2m$ とおいてみると

$$n^2 + m = 4m^2 + m = m(4m+1)$$

となって、

$$\gcd(n^2+m, 2n+1) = \gcd(m(4m+1), 4m+1) = 4m+1$$

で目論見通りの結果が得られる。$a > 1$ より $n > 0, m > 0$ となるので、「正の整数」という条件もみたしている。以上で示された。 ■