(1)$x^3-2=0$が解けない原因と対策

$\hat{F}_{k-1}$の元がvの多項式で与えられたとき，これを$\hat{F}_{k-1}$の元($\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$と$\zeta_{p_1}, \zeta_{p_2}, \cdots, \zeta_{p_k}$の多項式)に書き換えるところに誤りがありました。与えられたvの多項式について，$g_{k-1}(v)$(vのF_{k-1}上の最小多項式)による剰余を取ると，定数項(v^0の項)のほかに，見かけ上は他の項も出てきます。その後，他の項は$\alpha_i^{p_i}-A_i=0$と$\zeta_{p_i}^{p_i-1}+\cdots+\zeta_{p_i}+1=0$を使って消去されます。しかし，私のプログラムには，$g_{k-1}(v)$による剰余を取った後，他の項を消去していないところがありました。該当するのは「可解な代数方程式の…解法」の(12.11)によりb_iを計算するところで，これに相当するプログラムは44頁26行および48頁17行の

```
bi=FracToPoly[PolynomialRemainder[Expand[a1^(p-i)*ai],gx/.x->v,v]/A1];
```

です。PolynomialRemainderは多項式の剰余を求める関数，FracToPolyは分数式を多項式に書き換える関数です。これに対して，関数ReductionOfAlphaを追加し，他の項を消去するように修正しました。

```
bi=FracToPoly[ReductionOfAlpha[PolynomialRemainder[
        Expand[a1^(p-i)*ai],gx/.x->v,v]]/A1];
```

当初はReductionOfAlphaを入れていましたが，FracToPolyでも$\alpha_i^{p_i}-A_i=0$と$\zeta_{p_i}^{p_i-1}+\cdots+\zeta_{p_i}+1=0$による消去を行っているため，重ねて行う必要はないと考え，ReductionOfAlphaを削除しました。それが誤りでした。これを復活させることより，計算できるようになりました。以下に計算結果を示します。

$\alpha_1^2+108=0$，$\zeta_3^2+\zeta_3+1=0$，$\alpha_2^3-\alpha_1/2+6\zeta_3+3=0$

$x_1=-\alpha_2/2-\alpha_1\alpha_2/36$，$x_2=\alpha_2/2-\alpha_1\alpha_2/36$，$x_3=\alpha_1\alpha_2/18$

ただし，すべての$\alpha_1, \zeta_3, \alpha_2$(2×2×3=12通り)について，正しい計算結果が得られるわけではありません。$\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$とすると

① $\alpha_1=6\sqrt{3}i$，$\zeta_3=\omega$の場合

$\alpha_2^3=0$，$\alpha_2=0$(3重値)より，$x_1=x_2=x_3=0$となる。

② $\alpha_1=6\sqrt{3}i$，$\zeta_3=\omega^2$の場合

$\alpha_2^3=6\sqrt{3}i=-2(\sqrt{3}i)^3$より

$\alpha_2=-\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i$ならば，$x_1=\sqrt[3]{2}\,\omega$，$x_2=\sqrt[3]{2}\,\omega^2$，$x_3=\sqrt[3]{2}$

$\alpha_2=-\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i\,\omega$ならば，$x_1=\sqrt[3]{2}\,\omega^2$，$x_2=\sqrt[3]{2}$，$x_3=\sqrt[3]{2}\,\omega$

$\alpha_2=-\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i\,\omega^2$ならば，$x_1=\sqrt[3]{2}$，$x_2=\sqrt[3]{2}\,\omega$，$x_3=\sqrt[3]{2}\,\omega^2$

③ $\alpha_1=-6\sqrt{3}i$，$\zeta_3=\omega$の場合

$\alpha_2^3=-6\sqrt{3}i=2(\sqrt{3}i)^3$より

$\alpha_2=\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i$ならば，$x_1=\sqrt[3]{2}\,\omega^2$，$x_2=\sqrt[3]{2}\,\omega$，$x_3=\sqrt[3]{2}$

$\alpha_2=\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i\,\omega$ならば，$x_1=\sqrt[3]{2}$，$x_2=\sqrt[3]{2}\,\omega^2$，$x_3=\sqrt[3]{2}\,\omega$

$\alpha_2=\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i\,\omega^2$ならば，$x_1=\sqrt[3]{2}\,\omega$，$x_2=\sqrt[3]{2}$，$x_3=\sqrt[3]{2}\,\omega^2$

④ $\alpha_1=-6\sqrt{3}i$，$\zeta_3=\omega^2$の場合

$\alpha_2^3=0$，$\alpha_2=0$(3重値)より，$x_1=x_2=x_3=0$となる。

以上のように，$x^3-2=0$が解けない原因は，私の場合は計算式の誤りではなく，単なるコーディング上のバグでした。0での割り算やその他の障害も起きませんでした。ただし，$\alpha_2=0$（上記①,④）の場合は正しい計算結果にはなりません。余談ですが，$\theta_1(x)$の最高次係数の3乗根がα_2ですから，$\alpha_2=0$というのは$\theta_1(x)=0$というのと同じです。$\theta_1(x)$よりα_2のほうが重要度が高いので —— $\theta_1(x)$は計算途中で使われ，計算結果には現れませんが，α_2は計算結果に現れる″べき根″そのものです。—— 今後，この問題を議論するときは，「$\theta_1(x)=0$となる場合は…」と言うのは「$\alpha=0$となる場合は…」と言い改めることを提案したいと思います。

(2) $x^5-3=0$の計算結果

プログラムの修正後は$x^5-3=0$も計算できるようになりました。以下に計算結果を示します。

$\alpha_1{}^2-7123887508753125/4=0$，$\alpha_2{}^2+\alpha_1+84403125/2=0$，$\zeta_5{}^4+\zeta_5{}^3+\zeta_5{}^2+\zeta_5+1=0$

$\alpha_3{}^5-(15/4)(233+466\zeta_5+377\zeta_5{}^2+89\zeta_5{}^3)-(1/25164150)\alpha_1(521+1042\zeta_5+843\zeta_5{}^2+199\zeta_5{}^3)$
$\quad -(1/4)\alpha_2+(1/377462250)\alpha_1\alpha_2(1+2\zeta_5{}^2+2\zeta_5{}^3)=0$

$x_1=\alpha_3-(1/37746225)\alpha_1\alpha_3-(377/60)\alpha_2\alpha_3+(281/1887311250)\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

$x_2=-\alpha_3+(1/37746225)\alpha_1\alpha_3-(377/60)\alpha_2\alpha_3+(281/1887311250)\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

$x_3=-(3/4)\alpha_3+(1/75492450)\alpha_1\alpha_3+(329/20)\alpha_2\alpha_3-(2207/5661933750)\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

$x_4=(3/4)\alpha_3-(1/75492450)\alpha_1\alpha_3+(329/20)\alpha_2\alpha_3-(2207/5661933750)\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

$x_5=-(61/3)\alpha_1\alpha_3+(124/257360625)\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

それにしても，これほど簡単な方程式の計算結果が，これほど複雑になるとは思いませんでした。ストレートに，$\alpha_3{}^5-3=0$，$x_1=\alpha_3$，$x_2=\alpha_3\zeta_5$，$x_3=\alpha_3\zeta_5{}^2$，$x_4=\alpha_3\zeta_5{}^3$，$x_5=\alpha_3\zeta_5{}^4$という計算結果は出ないようです。ここでは「ガロア理論に基づいた解法」により，体の拡大列を忠実に一段ずつ登りながら解いていくので，必然的にそのようになるのかもしれません。以下に計算結果の検証を示します。

$\omega=(-1+\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i)/4$（1の原始5乗根の1つ）とすると

① $\alpha_1=(37746225/2)\sqrt{5}$，$\alpha_2=15\sqrt{(375125+167761\sqrt{5})/2}\,i$，$\zeta_5=\omega$の場合

$\alpha_2=15\{233(\omega-\omega^4)+144(\omega^2-\omega^3)\}$に書き換えると，$\alpha_3{}^5=15(\omega-\omega^4)(161+72\sqrt{5})$となる。

さらに，$\alpha_3{}^5=3\{(\omega-\omega^4)(3+\sqrt{5})/2\}^5$に書き換えられる。これより

$\alpha_3=\sqrt[5]{3}\,(\omega-\omega^4)(3+\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_5=\sqrt[5]{3}$

$\alpha_3=\sqrt[5]{3}\,(\omega^2-1)(3+\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_3=\sqrt[5]{3}$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega$

$\alpha_3=\sqrt[5]{3}\,(\omega^3-\omega)(3+\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$

$\alpha_3=\sqrt[5]{3}\,(\omega^4-\omega^2)(3+\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_2=\sqrt[5]{3}$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$

$\alpha_3=\sqrt[5]{3}\,(1-\omega^3)(3+\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_4=\sqrt[5]{3}$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$

② $\alpha_1=(37746225/2)\sqrt{5}$，$\alpha_2=15\sqrt{(375125+167761\sqrt{5})/2}\,i$，$\zeta_5=\omega^2,\omega^3,\omega^4$の場合

$\alpha_2=15\{233(\omega-\omega^4)+144(\omega^2-\omega^3)\}$に書き換えると，$\alpha_3{}^5=0$となる。

$\alpha_3=0$（5重値）より，$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$となる。

③ $\alpha_1=(37746225/2)\sqrt{5}$，$\alpha_2=-15\sqrt{(375125+167761\sqrt{5})/2}\,i$，$\zeta_5=\omega^4$の場合

$\alpha_2=-15\{233(\omega-\omega^4)+144(\omega^2-\omega^3)\}$に書き換えると，$\alpha_3{}^5=-15(\omega-\omega^4)(161+72\sqrt{5})$となる。

さらに，$\alpha_3{}^5=-3\{(\omega-\omega^4)(3+\sqrt{5})/2\}^5$に書き換えられる。これより

$\alpha_3=-\sqrt[5]{3}\,(\omega-\omega^4)(3+\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_5=\sqrt[5]{3}$

$\alpha_3=-\sqrt[5]{3}\,(\omega^2-1)(3+\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_4=\sqrt[5]{3}$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega$

$\alpha_3=-\sqrt[5]{3}\,(\omega^3-\omega)(3+\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_2=\sqrt[5]{3}$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$

$\alpha_3=-\sqrt[5]{3}\,(\omega^4-\omega^2)(3+\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$

$\alpha_3=-\sqrt[5]{3}\,(1-\omega^3)(3+\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_3=\sqrt[5]{3}$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$

④ $\alpha_1=(37746225/2)\sqrt{5}$，$\alpha_2=-15\sqrt{(375125+167761\sqrt{5})/2}\,i$，$\zeta_5=\omega, \omega^2, \omega^3$の場合

$\alpha_2=-15\{233(\omega-\omega^4)+144(\omega^2-\omega^3)\}$に書き換えると，$\alpha_3{}^5=0$となる。

$\alpha_3=0$(5重値)より，$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$となる。

⑤ $\alpha_1=-(37746225/2)\sqrt{5}$，$\alpha_2=15\sqrt{(375125-167761\sqrt{5})/2}\,i$，$\zeta_5=\omega^2$の場合

$\alpha_2=15\{233(\omega^2-\omega^3)+144(\omega^4-\omega)\}$に書き換えると，$\alpha_3{}^5=15(\omega^2-\omega^3)(161-72\sqrt{5})$となる。

さらに，$\alpha_3{}^5=3\{(\omega^2-\omega^3)(3-\sqrt{5})/2\}^5$に書き換えられる。これより

$\alpha_3=\sqrt[5]{3}\,(\omega^2-\omega^3)(3-\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_5=\sqrt[5]{3}$

$\alpha_3=\sqrt[5]{3}\,(\omega^3-\omega^4)(3-\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_2=\sqrt[5]{3}$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega$

$\alpha_3=\sqrt[5]{3}\,(\omega^4-1)(3-\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_3=\sqrt[5]{3}$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$

$\alpha_3=\sqrt[5]{3}\,(1-\omega)(3-\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_4=\sqrt[5]{3}$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$

$\alpha_3=\sqrt[5]{3}\,(\omega-\omega^2)(3-\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$

⑥ $\alpha_1=-(37746225/2)\sqrt{5}$，$\alpha_2=15\sqrt{(375125-167761\sqrt{5})/2}\,i$，$\zeta_5=\omega, \omega^3, \omega^4$の場合

$\alpha_2=15\{233(\omega^2-\omega^3)+144(\omega^4-\omega)\}$に書き換えると，$\alpha_3{}^5=0$となる。

$\alpha_3=0$(5重値)より，$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$となる。

⑦ $\alpha_1=-(37746225/2)\sqrt{5}$，$\alpha_2=-15\sqrt{(375125-167761\sqrt{5})/2}\,i$，$\zeta_5=\omega^3$の場合

$\alpha_2=-15\{233(\omega^2-\omega^3)+144(\omega^4-\omega)\}$に書き換えると，$\alpha_3{}^5=-15(\omega^2-\omega^3)(161-72\sqrt{5})$となる。

さらに，$\alpha_3{}^5=-3\{(\omega^2-\omega^3)(3-\sqrt{5})/2\}^5$に書き換えられる。これより

$\alpha_3=-\sqrt[5]{3}\,(\omega^2-\omega^3)(3-\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_5=\sqrt[5]{3}$

$\alpha_3=-\sqrt[5]{3}\,(\omega^3-\omega^4)(3-\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega$

$\alpha_3=-\sqrt[5]{3}\,(\omega^4-1)(3-\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_4=\sqrt[5]{3}$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$

$\alpha_3=-\sqrt[5]{3}\,(1-\omega)(3-\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$，$x_3=\sqrt[5]{3}$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$

$\alpha_3=-\sqrt[5]{3}\,(\omega-\omega^2)(3-\sqrt{5})/2$ならば，$x_1=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_2=\sqrt[5]{3}$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$

⑧ $\alpha_1=-(37746225/2)\sqrt{5}$，$\alpha_2=-15\sqrt{(375125-167761\sqrt{5})/2}\,i$，$\zeta_5=\omega, \omega^2, \omega^4$の場合

$\alpha_2=-15\{233(\omega^2-\omega^3)+144(\omega^4-\omega)\}$に書き換えると，$\alpha_3{}^5=0$となる。

$\alpha_3=0$(5重値)より，$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$となる。

$x^3-2=0$の場合と同様に，すべての$\alpha_1, \alpha_2, \zeta_5, \alpha_3$（2×2×4×5=80通り）について，正しい計算結果が得られるわけではありません。$\alpha_3=0$（上記②, ④, ⑥, ⑧）の場合は正しい計算結果にはなりません。ここで，$\alpha_2=15\sqrt{(375125+167761\sqrt{5})/2}\,i$から$\alpha_2=15\{233(\omega-\omega^4)+144(\omega^2-\omega^3)\}$への書き換えや，$\alpha_3{}^5=15(\omega-\omega^4)(161+72\sqrt{5})$から$\alpha_3{}^5=3\{(\omega-\omega^4)(3+\sqrt{5})/2\}^5$への書き換えには，多大な試行錯誤と労力を費やしたことを付記しておきます。

(3)他の計算例での確認

「可解な代数方程式の…解法」の第16節において，可解な5次方程式の根を(16.2)で表したとき，式中のA, B, C, Dのどれかが0となる場合も解けないのではないかと危惧し，以下の5次方程式でも確認してみました。

(例2) $f(x)=x^5+10x^3+20x^2+10x+6$ (60頁)
(例3) $f(x)=x^5+5x^3+5x+2$ (61頁)
(例4) $f(x)=x^5-10x^2+10x+2$ (61頁)

危惧したとおり，修正前のプログラムでは計算できませんでしたが，修正後のプログラムでは計算できるようになりました。計算結果の検証は$x^5-3=0$の場合と同じ方法では困難であるため，数値計算で検証しました。これは「可解な代数方程式の…解法」の46頁において，$x^4+2x^3+3x^2+4x+5=0$の検証を行ったのと同じ方法です。それによると，上記3つの5次方程式とも，$\alpha_3\neq0$の場合 ―― 数値計算による誤差を考慮に入れて，$|\alpha_3|\neq0$が非常に小さい場合も$\alpha_3=0$であると見なす。―― は正しい計算結果となりました。

(4)計算結果の検証

今までは2つの方法がありました。第1の方法は$x^5-3=0$の場合と同様に，計算結果の式を変形して，予め用意した所望の正解($x^5-3=0$の場合は$x_1=\sqrt[5]{3}$，$x_2=\sqrt[5]{3}\,\omega$，$x_3=\sqrt[5]{3}\,\omega^2$，$x_4=\sqrt[5]{3}\,\omega^3$，$x_5=\sqrt[5]{3}\,\omega^4$)と一致することを確認する方法です。長所は正確であること，短所は所望の正解を用意しなければならないこと，式の変形に多大な試行錯誤と労力を要することです。第2の方法は数値計算による方法です。長所は容易であること，短所は正確でないことです。これに加えて，第3の方法を思いつきました。$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$と$\zeta_{p_1}, \zeta_{p_2}, \cdots, \zeta_{p_s}$の多項式で表された根$x_1, x_2, \cdots, x_n$を$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$に代入して展開した後，$\alpha_i^{p_i}-A_i=0$と$\zeta_{p_i}^{p_i-1}+\cdots+\zeta_{p_i}+1=0$を使って$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$と$\zeta_{p_1}, \zeta_{p_2}, \cdots, \zeta_{p_s}$を消去します。これがもとの方程式$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$と一致することを確認するのです。「可解な代数方程式の…解法」の第14節で示した(例1)−(例9)のうち，根を求めることのできた以下の5つの方程式については，もとの方程式と一致することが確認できました。

(例1) $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
(例2) $f(x)=x^4+a_2x^2+a_0$
(例4) $f(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$
(例5) $f(x)=x^5+2x^3+4x^2-x+4$
(例9) $f(x)=x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

ところが，問題となっている方程式では，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$と$\zeta_{p_1}, \zeta_{p_2}, \cdots, \zeta_{p_s}$が消去されませんでした。$x^3-2=0$の場合は次式となりました。第4辺が生の計算結果で，さらに第5辺のように意図的に書き換えました。

$$
\begin{aligned}
&(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\\
&\quad=(x+\alpha_2/2+\alpha_1\alpha_2/36)(x-\alpha_2/2+\alpha_1\alpha_2/36)(x-\alpha_1\alpha_2/18)\\
&\quad=x^3-(1/432)\alpha_2^2(\alpha_1^2+108)x-(1/23328)\alpha_1\alpha_2^3(\alpha_1^2-324)\\
&\quad=x^3-1-(1/18)\alpha_1(1+2\zeta_3)\\
&\quad=x^3+(1/54)\alpha_1\alpha_2^3
\end{aligned}
$$

$2\times2\times3=12$通りの$\alpha_1, \zeta_3, \alpha_2$に対して，$\alpha_1\alpha_2^3$は$-108$と0の2つの値を取りますが，もとの方程式と一致するのは前者だけです。$x^5-3=0$の場合は次式となりました。第3辺が生の計算結果で，さらに第4辺のように意図的に書き換えました。

$$
\begin{aligned}
&(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\\
&\quad=\{x-\alpha_3+(1/37746225)\alpha_1\alpha_3+(377/60)\alpha_2\alpha_3-(281/1887311250)\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}\\
&\qquad\times\{x+\alpha_3-(1/37746225)\alpha_1\alpha_3+(377/60)\alpha_2\alpha_3-(281/1887311250)\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}\\
&\qquad\times\{x+(3/4)\alpha_3-(1/75492450)\alpha_1\alpha_3-(329/20)\alpha_2\alpha_3+(2207/5661933750)\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}\\
&\qquad\times\{x-(3/4)\alpha_3+(1/75492450)\alpha_1\alpha_3-(329/20)\alpha_2\alpha_3+(2207/5661933750)\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}\\
&\qquad\times\{x+(61/3)\alpha_1\alpha_3-(124/257360625)\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}\\
&\quad=x^5-3/4+(1/125820750)\alpha_1(1+2\zeta_5^2+2\zeta_5^3)+(1/100)\alpha_2(322+644\zeta_5-199\zeta_5^2+843\zeta_5^3)\\
&\qquad+(1/1887311250)\alpha_1\alpha_2(-144-288\zeta_5+89\zeta_5^2-377\zeta_5^3)\\
&\quad=x^5+(1/25)\alpha_3^5(322+644\zeta_5-199\zeta_5^2+843\zeta_5^3)
\end{aligned}
$$

$2\times2\times4\times5=80$通りの$\alpha_1, \alpha_2, \zeta_5, \alpha_3$に対して，$\alpha_3^5(322+644\zeta_5-199\zeta_5^2+843\zeta_5^3)$は$-75$と0の2つの値を取りますが，もとの方程式と一致するのは前者だけです。「可解な代数方程式の…解法」の第16節で示した3つの可解な5次方程式については，$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$を展開した後，各係数を$\alpha_1, \alpha_2, \zeta_5, \alpha_3$の多項式として求めるところまではできました。しかし，これらがもとの方程式の各係数と一致することを確認するには，$x^5-3=0$の場合と同様に多大な試行錯誤と労力を必要とするため，できませんでした。結局，問題となっている方程式については，今のところは数値計算による検証しかありません。

まとめ

(1) $x^3-2=0$が解けない原因はプログラムのバグでした。プログラムの修正後は，$x^3-2=0$が解けるようになりました。$x^5-3=0$も解けるようになりました。

(2) $x^3-2=0$と$x^5-3=0$では，根$x_1, x_2, \cdots, x_n$をべき根$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$と$\zeta_{p_1}, \zeta_{p_2}, \cdots, \zeta_{p_s}$の多項式で表したとき，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$のどれかが0となる場合があります。このような方程式では，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$のどれかが0となる場合においては，これに対応する$x_1, x_2, \cdots, x_n$は正しい根にはなりません。

(3) 上記(2)に該当する方程式では，第3の検証方法による計算結果はもとの方程式と一致しません。